Rationale und nicht-rationale Behandlung des elektromagnetischen Feldes

Stille, Ulrich

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 1, 1949, S. 38-55

Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Rationale und nicht-rationale Behandlung des elektromagnetischen Feldes

Von Ulrich Stille

Vorgelegt von Herrn G. Cario

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Anstalt, Braunschweig)

Rational and non-rational treatment of the electromagnetic field

By U. Stille

Abstract: The question of a rational or non-rational way of writing of equations, definition of quantities and fixing of units is formulated in general and represented for source- and vortex fields. In order to characterize this geometrical alternative, "corresponding coefficients" without dimension are introduced which are to be put equal to 1 or to 4π in the rational or non-rational case. The transition rational $\rightleftharpoons$ non-rational may be carried out in general according to the method of variation of quantities as well as variation of units. The description of the force of attraction between masses being in use since Newton, proves as non-rational. With the help of the principles generally laid down, the problem of the rational or non-rational description of electrodynamics as well as mutual transition from one treatment to another, is explained. For 4 ways of writing most important in practice (rational, partly rational according to Maxwell or Gauss, and non-rational according to Schaefer) a respective set of equations is developed and the concerned scheme of "corresponding coefficients" put up. In addition, the method given here, is compared with the representations made by other authors.

1. Einleitung

Der gegenseitige Bezug der verschiedenen Gleichungsschreibweisen, Größendefinitionen und Einheitenfestlegungen wird für das Gebiet der Elektrizität und des Magnetismus von den einzelnen Autoren in sehr unterschiedlicher Weise gehandhabt und dargestellt. Der Grund liegt vielleicht in der Tatsache, daß hierbei, um die Verhältnisse auf eine möglichst kurze Formel zu bringen, zwei Alternativen, die grundsätzlich voneinander unabhängig sind, miteinander verknüpft und in einer sich überschneidenden gemeinsamen Behandlung formuliert werden. Es sind dieses: einmal die geometrische Alternative rational $\div$ nicht-rational, zum anderen die physikalische Alternative der Beschreibung der Elektrodynamik mit 3, 4 oder 5 Grundgrößen. Die vorliegende Abhandlung hat die erste zum Thema, während die Darstellung der zweiten der folgenden Veröffentlichung[1]) vorbehalten bleiben soll.

Die Alternative rational $\div$ nicht-rational betrifft eine rein geometrisch bedingte Eigenschaft der Gleichungen und Größen. Man nennt Gleichungen rationell geschrieben oder Größen rational definiert, wenn in den mit ihnen in Gleichungsform dargestellten physikalischen Gesetzmäßigkeiten eine etwa vorhandene geometrische Symmetrie des behandelten Problems explizit zum

Ausdruck kommt, wenn also beispielsweise bei Vorliegen einer Kreis-, Zylinder- oder Kugelsymmetrie ein Faktor π, 2π oder 4π auftritt, dagegen bei linearen und homogenen Anordnungen π in den beschreibenden Gleichungen nicht erscheint. Im entgegengesetzten Fall heißt die Gleichungenschreibung oder die Definition der Größen nicht-rational.

2. Die Alternative rational ÷ nicht-rational in allgemeiner Formulierung

Der Unterschied rational ÷ nicht-rational läßt sich auf einfache Weise ganz allgemein fassen. Die entsprechenden Relationen sollen zunächst für Quellen- und Wirbelfelder zusammengestellt werden.

Wir beginnen mit einem kugelsymmetrischen Beispiel als einfachstem Fall für den Zusammenhang zwischen Quelle und Feld. Eine kugelförmige Quelle M vom Radius R, welche gleichmäßig mit Quellen der räumlichen Dichte m erfüllt ist, erzeuge ein kugelsymmetrisches Feld, welches durch einen Feldvektor $\mathfrak{A}$ zu beschreiben ist; der Betrag A des Vektors ist auf einer Kugelfläche konstant und der Vektor selbst radial gerichtet. Dann besteht eine einfache Beziehung zwischen dem Fluß Ψ des Vektors $\mathfrak{A}$

$$\Psi = \oint \mathfrak{A} \cdot d\mathfrak{f} \tag{1}$$

und der Menge M der Quelle. Um in der physikalischen Definition des Vektorfeldes $\mathfrak{A}$ noch Freiheit zu haben und den Fluß Ψ der Menge M dimensionsmäßig anpassen zu können, führen wir eine allgemeine skalare Größe a ein. Sofern a eine von Eins verschiedene Größe ist, enthält sie eine für das betreffende Feld charakteristische Konstante (z. B. Gravitationskonstante, elektrische oder magnetische Feldkonstante). Den Zusammenhang zwischen erzeugtem Fluß und erzeugender Menge können wir allgemein in der Form

$$a\Psi = \alpha M \tag{2}$$

schreiben. α ist ein rein geometrisch bedingter dimensionsloser Zahlenfaktor, durch den wir die Unterscheidung rational ÷ nicht-rational beschreiben, und soll nur die beiden Werte 1 oder 4π annehmen. Die Alternative rational ÷ nicht-rational ist dann für das Quellenfeld entsprechend den beiden Möglichkeiten zu formulieren

$$\text{rational:} \qquad a\Psi = \oint a\mathfrak{A} \cdot d\mathfrak{f} = 1 \cdot M, \tag{3 r}$$

$$\text{nicht-rational:} \qquad a\Psi = \oint a\mathfrak{A} \cdot d\mathfrak{f} = 4\pi \cdot M. \tag{3 n}$$

Man kann diese Relationen auch folgendermaßen interpretieren: bei rationaler Schreibung und Definition gehen von der erzeugenden Menge Eins 1, bei nicht-rationaler 4π Flußröhren oder Flußdichtelinien „allseitig in den Raum" aus; oder: bei rationaler Definition werden erzeugende Menge M und von dieser ausgehender Fluß Ψ einander gleichgesetzt, während nicht-rational der Fluß Ψ als das Produkt aus erzeugender Menge M und dem Raumwinkel $\int d\Omega$ definiert wird, den der Fluß von der Menge aus gesehen erfüllt*).

*) In einer neueren Veröffentlichung übt Budeanu[2]) an der rationalen Definition grundsätzlich Kritik und stellt die Behauptung auf, daß nur die nicht-rationale Definition eine physikalische Berechtigung besäße, während die rationale „den Ausdruck einer

Wenn wir die entsprechenden differentiellen Darstellungen bei räumlicher Quellenverteilung der räumlichen Dichte m oder bei mit Quellen belegten Sprungflächen der Flächendichte μ einbeziehen, können wir die rationale oder nicht-rationale Formulierung für ein Quellenfeld zusammenfassen in den Beziehungen

$$\frac{1}{a}\oint a\,\mathfrak{A}\cdot d\mathfrak{f} = M, \tag{4a}$$

$$\frac{1}{a}\operatorname{div} a\,\mathfrak{A} = m, \tag{4b}$$

$$\frac{1}{a}\operatorname{Div} a\,\mathfrak{A} = \mu, \tag{4c}$$

mit $\alpha = 1$: rationale Definition, (5r)

$\alpha = 4\pi$: nicht-rationale Definition. (5n)

Den geometrischen Zahlenfaktor α wollen wir als Zuordnungskoeffizienten bezeichnen.

Läßt sich im besonderen eine Quelle M in mehrere Anteile zerlegen, beispielsweise nach dem Schema

$$M_a = M_b + M_c \quad (6) \qquad \text{oder} \qquad \mu_a = \mu_b + \mu_c, \quad (6')$$

mit denen jeweils ein eigener Fluß eines Vektorfeldes $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ verknüpft werden kann, so lauten die entsprechenden Gleichungen mit den skalaren Größen b, c und den zugehörigen Zuordnungskoeffizienten α, β, γ

$$\frac{1}{a}\oint \mathfrak{A}\cdot d\mathfrak{f} = M_a, \quad (7a) \qquad \frac{1}{a}\operatorname{Div}\mathfrak{A} = \mu_a, \quad (7a')$$

$$\frac{1}{\beta}\oint b\,\mathfrak{B}\cdot d\mathfrak{f} = M_b, \quad (7b) \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\beta}\operatorname{Div} b\,\mathfrak{B} = \mu_b, \quad (7b')$$

$$\frac{1}{\gamma}\oint c\,\mathfrak{C}\cdot d\mathfrak{f} = M_c, \quad (7c) \qquad \frac{1}{\gamma}\operatorname{Div} c\,\mathfrak{C} = \mu_c, \quad (7c')$$

mit

$$\frac{1}{a}\mathfrak{A} = \frac{b}{\beta}\mathfrak{B} + \frac{c}{\gamma}\mathfrak{C}. \tag{8}$$

Wenn wir auf die beiden geometrisch bedingten Möglichkeiten der rationalen und nicht-rationalen Gleichungenschreibung und Größendefinition in allgemeiner Form Rücksicht nehmen wollen, müssen wir also in die grundsätzlichen physikalischen Beziehungen für ein Quellenfeld und die aus diesen folgenden

physikalischen Größe (räumlicher Winkel) durch Einführung eines parasitären Zahlenfaktors 4π unterdrücke" und „uns ziemlich weit weg und gleichzeitig außerhalb von jeder physikalischen Betrachtung leite". Die von Budeanu vorgebrachten Argumente scheinen allerdings seine Verweisung der rationalen Definition aus dem Bereich der Physik ebensowenig zu rechtfertigen, wie seine historische Darstellung der Entwicklung des Rationalisierungsproblems in der Elektrodynamik vollständig oder objektiv ausgeglichen ist (so wird beispielsweise Name und Arbeit von Giorgi auf den 9 Seiten der Budeanuschen Veröffentlichung überhaupt nicht genannt oder erwähnt).

Gleichungen an Stelle eines Vektors $\mathfrak{A}$ jeweils die Größe $\mathfrak{A}/\alpha$ einführen und erhalten entsprechend den Verfügungen (5) mit $\alpha = 1$ die rationale, mit $\alpha = 4\pi$ die nicht-rationale Darstellung.

Als Spezialfall behandeln wir die Rückführung eines wirbelfreien Vektorfeldes auf ein skalares Potentialfeld. Das durch die Gleichungen (4) beschriebene Vektorfeld $\mathfrak{A}$ muß wirbelfrei sein, d. h. sich durch ein skalares Potential φ darstellen lassen

$$\operatorname{rot} \mathfrak{A} = 0, \tag{9a}$$

$$\mathfrak{A} = -\operatorname{grad} \varphi. \tag{9b}$$

Falls die skalare Größe a unabhängig von den Raumkoordinaten und $\mathfrak{A}$ ist, ergibt sich aus (4b) und (9b) die Poissonsche Differentialgleichung

$$\Delta \varphi = -\frac{a\,m}{a}. \tag{10}$$

Ihre Lösung für den Fall einer „Punktquelle“ M lautet für $r > R$

$$\varphi = \frac{a\,M}{4\pi a r}, \tag{11}$$

Setzen wir $\alpha = 1$, so erhalten wir die rationale Darstellung

$$\varphi = \frac{M}{4\pi a r}, \tag{11r}$$

während sich mit $\alpha = 4\pi$ die nicht-rationale Darstellung

$$\varphi = \frac{M}{a r} \tag{11n}$$

ergibt. Aus der rationalen Gleichung (11r) ist direkt die hier vorhandene Kugelsymmetrie an dem im Nenner stehenden Faktor 4π abzulesen.

Bei zahlreichen Problemen stehen Quellen- und Wirbelfelder miteinander in Beziehung. So wird beispielsweise in der Darstellung der Elektrodynamik mit 4 Grundgrößen[1]) das magnetische Wirbelfeld, welches einen stromdurchflossenen Leiter umschließt, durch den gleichen Feldvektor beschrieben, der auch zur Darstellung eines magnetischen Feldes dient, welches von den „Polen“ eines permanenten Magneten ausgeht. Im letzten Fall wird das magnetische Feld als ein Quellenfeld, das die Magnetpole hervorruft, behandelt. Man setzt in dieser Auffassung das magnetische Wirbelfeld um eine geschlossene Stromschleife formal gleich dem magnetischen Quellenfeld einer äquivalenten magnetischen Scheibe, die dann als eine Sprungfläche magnetischer Dipole, d. h. mit magnetischen „Mengen“ auf beiden Seiten entgegengesetzten Vorzeichens belegt, betrachtet wird.

Wegen dieses Ineinandergreifens von Quellen- und Wirbelfeld ist bei Benutzung des gleichen Vektors $\mathfrak{A}$ in beiden Fällen gleichmäßig an Stelle des Vektors $\mathfrak{A}$ die Größe $\mathfrak{A}/\alpha$ einzuführen, wenn man rationale und nicht-rationale Beschreibung in einer zusammenfassenden Form darstellen will.

Als Beispiel betrachten wir eine in einer Röhre fließende Strömung der Stromstärke I, mit der ein Wirbelfeld $\mathfrak{A}$ verknüpft sein soll. Dabei sei die Strömung I in jedem Querschnitt durch ein Integral

$$\int \mathfrak{G} \cdot d\mathfrak{f} = I \tag{12}$$

über den quellenfreien Stromdichtevektor $\mathfrak{G}$ darstellbar. Der grundsätzliche physikalische Zusammenhang zwischen Strömung oder Durchflutung und

Wirbel ist unter Einführung einer allgemeinen skalaren Größe a (zur evtl. erforderlichen Richtigstellung der Dimensionen) wieder mit dem Zuordnungskoeffizienten α in der Form

$$\frac{1}{a}\oint a\mathfrak{A}\cdot d\mathfrak{s} = I \text{ *)} \tag{13a}$$

oder

$$\frac{1}{a}\operatorname{rot} a\mathfrak{A} = \mathfrak{G} \tag{13b}$$

zu schreiben. Mit den beiden nach den Beziehungen (5) für α zur Verfügung stehenden Werten 1 und 4π lautet die Gleichung (13a)

$$\text{rational:} \quad \oint a\mathfrak{A}\cdot d\mathfrak{s} = 1\cdot I, \tag{14r}$$

$$\text{nicht-rational:} \quad \oint a\mathfrak{A}\cdot d\mathfrak{s} = 4\pi\cdot I. \tag{14n}$$

In manchen Fällen verschwindet die Divergenz der Stromdichte $\mathfrak{G}$ nicht mehr; der Vektor $\mathfrak{G}$ wird erst durch Zufügen eines zweiten Vektors $\dot{\mathfrak{B}}$ zu einem quellenfreien Strömungsfeld ergänzt, wobei $\mathfrak{B}$ selbst wieder Quellen besitzt (z. B. $\mathfrak{B}$ = dielektrische Verschiebungsdichte, falls $\mathfrak{G}$ die elektrische Stromdichte in nicht-stationären Feldern darstellt). Dann ist zur Berichtigung evtl. vorhandener Dimensionsunterschiede und der Alternative rational ÷ nichtrational beim Vektorfeld $\mathfrak{B}$ statt des Vektors $\dot{\mathfrak{B}}$ die Größe $b\,\dot{\mathfrak{B}}/\beta$ einzuführen. Die den Gleichungen (13) entsprechenden Beziehungen lauten für diesen Fall

$$\frac{1}{a}\oint a\mathfrak{A}\cdot d\mathfrak{s} = \int \mathfrak{G}\cdot d\mathfrak{f} + \frac{d}{dt}\int \frac{b\mathfrak{B}}{\beta}\cdot d\mathfrak{f}, \tag{15a}$$

$$\frac{1}{a}\operatorname{rot} a\mathfrak{A} = \mathfrak{G} + \frac{b}{\beta}\dot{\mathfrak{B}}. \tag{15b}$$

Ist das Vektorfeld $\mathfrak{A}$ der Gleichungen (13) mit einem quellenfreien Wirbelfeld $\mathfrak{B}$ durch die Beziehung

$$\frac{\mathfrak{A}}{a} = \frac{b}{\beta}\mathfrak{B} \tag{16}$$

mit

$$\operatorname{div}\mathfrak{B} = 0 \tag{17}$$

verknüpft, so können wir dieses auf ein Vektorpotential $\mathfrak{C}$ zurückführen

$$\mathfrak{B} = \operatorname{rot}\mathfrak{C}. \tag{18}$$

$\mathfrak{C}$ wird ein eindeutiges Vektorpotential des quellenfreien Feldes $\mathfrak{B}$, wenn man es selbst als quellenfrei ansetzt,

$$\operatorname{div}\mathfrak{C} = 0. \tag{19}$$

Falls die skalaren Größen a und b wieder unabhängig von den Raumkoordinaten und den Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind, läßt sich aus den Gleichungen (13b) und (16)

*) Der Koeffizient a kann auch hier wieder wie im Fall des Quellenfeldes bei den Gleichungen (3) durch eine geometrische Raumwinkelbetrachtung interpretiert werden.

bis (19) eine der Poissonschen Gleichung analoge Differentialgleichung für das Vektorpotential aufstellen:

$$\Delta \mathfrak{C} = -\frac{\beta}{a\,b}\,\mathfrak{G}. \tag{20}$$

Ihre Lösung lautet für den Fall einer Strömung I in einer geschlossenen linearen Bahn (Linienelement $d\mathfrak{s}$):

$$\mathfrak{C} = \frac{\beta I}{4\pi a b}\oint \frac{d\mathfrak{s}}{r}. \tag{21}$$

Unter Berücksichtigung der Gleichungen (18) und (16) folgt für den Vektor $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{r}^0$: Einheitsvektor vom Stromelement $I\,d\mathfrak{s}$ zum Aufpunkt):

$$\mathfrak{A} = \frac{\alpha I}{a}\oint \frac{d\mathfrak{s}\times\mathfrak{r}^0}{4\pi r^2}, \tag{22}$$

also mit $\alpha = 1$ die rationale Darstellung

$$\mathfrak{A} = \frac{I}{a}\oint \frac{d\mathfrak{s}\times\mathfrak{r}^0}{4\pi r^2}, \tag{22 r}$$

welche die (vom Stromelement aus gesehen) vorhandene Symmetrie explizit zum Ausdruck bringt, und mit $\alpha = 4\pi$ die nicht-rationale Darstellung

$$\mathfrak{A} = \frac{I}{a}\oint \frac{d\mathfrak{s}\times\mathfrak{r}^0}{r^2}\ ^{*}). \tag{22 n}$$

3. Übergänge rational $\rightleftarrows$ nicht-rational

Ebenso wie die Formulierung einer rationalen oder nicht-rationalen Behandlung physikalischer Probleme läßt sich die wechselseitige Überführung von rationalen und nicht-rationalen Darstellungen ineinander allgemein angeben. Hierbei ist grundsätzlich zwischen zwei Methoden zu unterscheiden, und zwar in der Weise, ob man bei einem Übergang rational $\rightleftarrows$ nicht-rational die Definition der Größen oder die Festlegung der Einheiten wechseln will**).

a) Methode der Variation der Größen. Der erste Weg führt über einen Wechsel in der Größendefinition zum Ziel — d. h. man legt einen Satz rational definierter Größen und einen Satz nicht-rational definierter Größen fest, zwischen denen jeweils ein rational bzw. nicht-rational geschriebenes

---

*) In der 4-Grundgrößen-Darstellung der Elektrodynamik würden die hier benutzten allgemeinen Formelzeichen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{G}$, I, a, b folgenden Größen zuzuordnen sein: $\mathfrak{A}$ der magnetischen Feldstärke $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$ der Kraftflußdichte, $\mathfrak{C}$ dem magnetischen Vektorpotential $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{G}$ der elektrischen Stromdichte, I der elektrischen Stromstärke, $a = 1$, b der reziproken absoluten Permeabilität $\mu_{abs} = \mu\,\mu_0$; α und β entsprechen den beiden Zuordnungskoeffizienten χ und ν_m des Abschnitts 5. In einer 5-Grundgrößen-Darstellung wäre a mit der von Hund[3]) als γ bzw. von Sommerfeld[4]) als V bezeichneten Größe $c_0\sqrt{\varepsilon_0\cdot\mu_0}$ identisch.

**) Für eingehende Diskussionen zur Frage rational $\div$ nicht-rational dankt der Verfasser Herrn Prof. Dr. J. Fischer, Karlsruhe, der für den Fall dieser Alternative in den Gleichungen des elektromagnetischen Feldes darauf hinwies[5]), daß der Faktor 4π sowohl durch die Wahl der Beträge der Einheiten wie durch die willkürliche gegenseitige Zuordnung von Menge und Fluß bestimmt wird.

Größengleichungssystem besteht. Dabei sind die auf die rationalen und nicht-rationalen Größen abgestimmten Einheiten die gleichen; die rationalen und nicht-rationalen Zahlenwerte verhalten sich wie die rationalen und nicht-rationalen Größen zueinander.

Wir wollen durch a^r, $\mathfrak{A}^r$, M^r die rational definierten Größen und durch a^n, $\mathfrak{A}^n$, M^n die nicht-rational definierten Größen hervorheben. Die den Gleichungen (3) entsprechenden Relationen lauten dann

$$a^r \oint \mathfrak{A}^r \cdot d\mathfrak{f} = M^r \qquad \text{(Größengleichung)} \qquad (23\mathrm{r})$$

$$a^n \oint \mathfrak{A}^n \cdot d\mathfrak{f} = 4\pi M^n \qquad \text{(Größengleichung)} \qquad (23\mathrm{n})$$

und können als Größengleichungen angesehen werden. Die auf diese Größengleichungen abgestimmten Einheiten*) sind für beide Fälle identisch

$$[a^n] = [a^r], \qquad (24)$$

$$[\mathfrak{A}^n] = [\mathfrak{A}^r], \qquad (25)$$

$$[M^n] = [M^r]. \qquad (26)$$

Die definitionsmäßige Zuordnung der rationalen und nicht-rationalen Größen, d. h. die Unterbringung des allgemeinen Zuordnungskoeffizienten α in der Größendefinition kann auf mannigfache Weise erfolgen. Von praktischer Bedeutung sind folgende beiden Arten:

α) Die Alternative rational $\div$ nicht-rational wird in die Definition der skalaren Größe a einbezogen, während die Definitionen für Quellenmenge M und Quellenfeld $\mathfrak{A}$ hiervon unberührt bleiben,

$$a^n = 4\pi a^r \quad (27\alpha) \qquad \mathfrak{A}^n = \mathfrak{A}^r \quad (28\alpha) \qquad M^n = M^r. \quad (29\alpha)$$

Die zu diesen Größenbeziehungen gehörigen Zahlenwertbeziehungen stimmen mit jenen formal überein

$$\{a^n\} = 4\pi \{a^r\} \quad (27\alpha') \qquad \{\mathfrak{A}^n\} = \{\mathfrak{A}^r\} \quad (28\alpha') \qquad \{M^n\} = \{M^r\}. \quad (29\alpha')$$

β) Man legt die Definition der skalaren Größe invariant gegenüber Rationalisierung fest und verteilt die Definitionsalternative rational $\div$ nicht-rational zu gleichen Teilen, d. h. jeweils mit dem Faktor $\sqrt{\alpha}$, auf Feld $\mathfrak{A}$ und Menge M,

$$a^n = a^r \quad (27\beta) \qquad \mathfrak{A}^n = \sqrt{4\pi}\,\mathfrak{A}^r \quad (28\beta) \qquad M^n = \frac{M^r}{\sqrt{4\pi}}. \quad (29\beta)$$

Die entsprechenden Zahlenwertbeziehungen lauten:

$$\{a^n\} = \{a^r\} \quad (27\beta') \qquad \{\mathfrak{A}^n\} = \sqrt{4\pi}\,\{\mathfrak{A}^r\} \quad (28\beta') \qquad \{M^n\} = \frac{\{M^r\}}{\sqrt{4\pi}}. \quad (29\beta')$$

In beiden Fällen gelangt man unter Benutzung der Verknüpfungsrelationen (27) bis (29) zwischen nicht-rationalen und rationalen Größen direkt von der Gleichung (23n) zu der Gleichung (23r) und umgekehrt.

b) Methode der Variation der Einheiten. Der zweite Weg geht von einer fest vorgegebenen und beim Wechsel rational $\rightleftarrows$ nicht-rational unverändert belassenen Größendefinition aus und paßt beim Übergang von einer

*) Die Einheit einer Größe a wird durch $[a]$, ihr Zahlenwert durch $\{a\}$ symbolisiert, soweit solche Unterscheidungen hier erforderlich erscheinen: $a = \{a\} \cdot [a]$.

rationalen zu einer nicht-rationalen Gleichungenschreibung oder umgekehrt die Einheiten an. Zwei Möglichkeiten dieses Verfahrens sollen hier betrachtet werden:

α) Man legt die rationale Größendefinition zugrunde. Die rationalen Größen a^r, $\mathfrak{A}^r$, M^r sind durch die Gleichung

$$a^r \oint \mathfrak{A}^r \cdot d\mathfrak{f} = M^r \quad \text{(Größengleichung)} \tag{23r}$$

verknüpft. Auf diese rationale Größengleichung seien die rationalen Einheiten $[a^r] = [a^r]_r$, $[\mathfrak{A}^r] = [\mathfrak{A}^r]_r$, $[M^r] = [M^r]_r$ der Gleichungen (24) bis (26) abgestimmt. Für die rationalen Größen a^r, $\mathfrak{A}^r$, M^r können wir neue, nicht-rationale Einheiten (Klammer-Index n) vereinbaren:

$$[a^r]_n = [a^r]_r \quad (30\,\text{a}) \qquad [\mathfrak{A}^r]_n = \frac{[\mathfrak{A}^r]_r}{\sqrt{4\pi}} \quad (31\,\text{a}) \qquad [M^r]_n = \sqrt{4\pi}\,[M^r]_r. \quad (32\,\text{a})$$

Zwischen den in diesen nicht-rationalen Einheiten $[a^r]_n$, $[\mathfrak{A}^r]_n$, $[M^r]_n$ gemessenen nicht-rationalen Zahlenwerten $\{a^r\}_n$, $\{\mathfrak{A}^r\}_n$, $\{M^r\}_n$ der rationalen Größen a^r, $\mathfrak{A}^r$, M^r besteht die Beziehung

$$\{a^r\}_n \oint \{\mathfrak{A}^r\}_n \cdot d\mathfrak{f} = 4\pi\{M^r\}_n \quad \text{(Zahlenwertgleichung),} \tag{33}$$

die als nicht-rationale Zahlenwertgleichung durch den vorgenommenen Einheitenwechsel aus der rationalen Größengleichung (23r) hervorgegangen ist. Die den Einheitenrelationen (30a) bis (32a) entsprechenden Zahlenwertbeziehungen gewinnt man nach dem allgemeinen Schema

$$x = \{x\}_r \cdot [x]_r = \{x\}_n \cdot [x]_n \tag{34}$$

als inverse Relationen

$$\{a^r\}_n = \{a^r\}_r \quad (30\,\text{b}) \qquad \{\mathfrak{A}^r\}_n = \sqrt{4\pi}\,\{\mathfrak{A}^r\}_r \quad (31\,\text{b}) \qquad \{M^r\}_n = \frac{\{M^r\}_r}{\sqrt{4\pi}}. \quad (32\,\text{b})$$

β) Geht man umgekehrt von der nicht-rationalen Größendefinition aus, so kehren sich die Verhältnisse gerade um. Zwischen den nicht-rationalen Größen a^n, $\mathfrak{A}^n$, M^n besteht die Beziehung

$$a^n \oint \mathfrak{A}^n \cdot d\mathfrak{f} = 4\pi M^n \quad \text{(Größengleichung).} \tag{23n}$$

Auf diese nicht-rationale Größengleichung seien die nicht-rationalen Einheiten $[a^n] = [a^n]_n$, $[\mathfrak{A}^n] = [\mathfrak{A}^n]_n$, $[M^n] = [M^n]_n$ der Gleichungen (24) bis (26) abgestimmt. Wir vereinbaren zu den nicht-rationalen Größen a^n, $\mathfrak{A}^n$, M^n neue, rationale Einheiten (Klammer-Index r)

$$[a^n]_r = [a^n]_n \quad (35\,\text{a}) \qquad [\mathfrak{A}^n]_r = \sqrt{4\pi}\,[\mathfrak{A}^n]_n \quad (36\,\text{a}) \qquad [M^n]_r = \frac{[M^n]_n}{\sqrt{4\pi}}. \quad (37\,\text{a})$$

Die in diesen gemessenen rationalen Zahlenwerte $\{a^n\}_r$, $\{\mathfrak{A}^n\}_r$, $\{M^n\}_r$ der nicht-rationalen Größen a^n, $\mathfrak{A}^n$, M^n genügen der Beziehung

$$\{a^n\}_r \oint \{\mathfrak{A}^n\}_r \cdot d\mathfrak{f} = \{M^n\}_r \quad \text{(Zahlenwertgleichung),} \tag{38}$$

die als rationale Zahlenwertgleichung der nicht-rationalen Größengleichung (23n) an die Seite zu stellen ist. Entsprechend bestehen zwischen den rationalen und nicht-rationalen Zahlenwerten die Relationen

$$\{a^n\}_r = \{a^n\}_n \quad (35\,\text{b}) \qquad \{\mathfrak{A}^n\}_r = \frac{\{\mathfrak{A}^n\}_n}{\sqrt{4\pi}} \quad (36\,\text{b}) \qquad \{M^n\}_r = \sqrt{4\pi}\,\{M^n\}_n. \quad (37\,\text{b})$$

Für die Beurteilung der verschiedenen unter a) und b) aufgezeigten Möglichkeiten für den Übergang rational $\rightleftarrows$ nicht-rational sind folgende Tatsachen von Bedeutung. Die rationale Zahlenwertgleichung (38) stimmt formal mit der rationalen Größengleichung (23r) überein, ebenso die nicht-rationale Zahlenwertgleichung (33) mit der nicht-rationalen Größengleichung (23n). Wir können beispielsweise eine rationale Beziehung der Form

$$a \oint \mathfrak{A} \cdot d\mathfrak{f} = M \tag{39}$$

einmal entsprechend Relation (23r) als rationale Größen- (oder Zahlenwert-) gleichung zwischen den rationalen Größen $a^r, \mathfrak{A}^r, M^r$, gemessen in den auf diese abgestimmten rationalen Einheiten $[a^r]_r, [\mathfrak{A}^r]_r, [M^r]_r$, ansehen und zum anderen entsprechend Relation (38) als rationale Zahlenwertgleichung zwischen den nicht-rationalen Größen $a^n, \mathfrak{A}^n, M^n$, gemessen in den auf diese nicht mehr abgestimmten rationalen Einheiten $[a^n]_r, [\mathfrak{A}^n]_r, [M^n]_r$, betrachten. Eine entsprechende Überlegung gilt für die nicht-rationale Beziehung

$$a \oint \mathfrak{A} \cdot d\mathfrak{f} = 4\pi M. \tag{40}$$

Diese Aussage ist sehr einfach auch gleichungsmäßig zu formulieren. Hierzu tragen wir die gerade eingeführte Doppelindizierung in den Relationen zwischen den auf die Größengleichungen (23) abgestimmten Einheiten nach

$[a^n]_n = [a^r]_r$ (24′) $[\mathfrak{A}^n]_n = [\mathfrak{A}^r]_r$ (25′) $[M^n]_n = [M^r]_r$ (26′)

und greifen als Beispiel die Größe M heraus. Aus den Beziehungen (26′) und (29β) folgt mit der Relation (32a) die Zahlenwertgleichung

$$\frac{M^n}{[M^n]_n} = \{M^n\}_n = \{M^r\}_n = \frac{M^r}{[M^r]_n}, \tag{41}$$

und mit der Relation (37a) die Zahlenwertgleichung

$$\frac{M^r}{[M^r]_r} = \{M^r\}_r = \{M^n\}_r = \frac{M^n}{[M^n]_r}. \tag{42}$$

Zusammen mit den Beziehungen (29β'), (32b) und (37b) erhalten wir die allgemeine Umrechnungsrelation zwischen rationalen und nicht-rationalen Zahlenwerten der Größe M

$$\frac{\{M^r\}}{\{M^n\}} = \frac{\{M^r\}_r}{\{M^r\}_n} = \frac{\{M^n\}_r}{\{M^n\}_n} = \sqrt{4\pi}. \tag{43}$$

Die Gleichungen (41) bis (43) sagen folgendes aus: Nach den hier in Vergleich zu setzenden Methoden aβ), bα) und bβ), die sämtlich die skalare Größe a bei der Rationalisierung invariant lassen, resultiert stets das gleiche Umrechnungsverhältnis (43) zwischen rationalem und nicht-rationalem Zahlenwert. Nun stellen aber gerade die Zahlenwerte als Verhältnisse zwischen der zu messenden Größe und der als Einheit bezeichneten Vergleichsgröße gleicher Art die eigentlichen Ergebnisse jeglicher physikalischen Messung dar. Folglich ist experimentell über die „Richtigkeit" oder „Unrichtigkeit" dieser drei Verfahren nicht zu entscheiden — sie sind nur als verschiedene, jedoch vollkommen gleichwertige Arten der formalen Beschreibung für den Übergang rational $\rightleftarrows$ nicht-rational zu werten; ihre jeweilige Anwendung ist lediglich eine Frage der Zweckmäßigkeit für den betrachteten Einzelfall.

Zu einem anderen Ergebnis führt jedoch die Methode aα), welche die Rationalisierung in einer Form vornimmt, bei der nicht die skalare Größe a, sondern Feld $\mathfrak{A}$ und Menge M invariant bleiben. Nach dem Verfahren aα) ergibt sich beispielsweise für das Verhältnis des rationalen zum nicht-rationalen Zahlenwert für die Größe M der von der Gleichung (43) abweichende Wert 1. Selbstverständlich läßt sich die Methode b) auch mit Invarianz gegenüber Rationalisierung entsprechend aα) führen; jedoch können wir hier auf die Entwicklung eines solchen Verfahrens verzichten.

4. Gravitation

Das Newtonsche Massenanziehungsgesetz wird heute noch allgemein in der Form

$$\mathfrak{K} = f \frac{M_1 M_2}{r^2} \mathfrak{r}^0 \tag{44}$$

geschrieben, wobei f die Gravitationskonstante und $\mathfrak{r}^0$ den Einheitsvektor für den Abstand der Masse M_2 von der Masse M_1 bedeutet. Wenn wir die rechte Seite der Gleichung (44) als Produkt aus der Beschleunigung $\mathfrak{b}$, welche die Masse M_2 im Gravitationsfeld der Masse M_1 erfährt, und der Masse M_2 auffassen, so ist diese Gravitationsbeschleunigung $\mathfrak{b}$ als

$$\mathfrak{b} = f \frac{M_1}{r^2} \mathfrak{r}^0 \tag{45}$$

anzusetzen. Der Zusammenhang zwischen erzeugender Masse M_1 und dem von dieser erzeugten Gravitationsfluß Γ, d. h. dem Hüllintegral über den Vektor $\mathfrak{b}$, lautet somit

$$\frac{1}{f} \Gamma = \frac{1}{f} \oint \mathfrak{b} \cdot d\mathfrak{f} = 4\pi M_1. \tag{46}$$

Der Vergleich mit Beziehung (4a) zeigt, daß hier in der definierenden Verknüpfungsrelation zwischen dem Quellenfeld $\mathfrak{b}$ und der Quelle M_1 als skalare Größe a die reziproke Gravitationskonstante auftritt und der Zuordnungskoeffizient α den Wert 4π besitzt. Oder mit anderen Worten ausgedrückt, wir bedienen uns in der Mechanik bei der Beschreibung der Gravitation stets einer nicht-rationalen Definition und Gleichungsschreibweise.

5. Elektrodynamik

Bei der Darstellung der Gesetzmäßigkeiten des elektrischen und magnetischen Feldes liegen die Verhältnisse nicht so einfach. Während zur Behandlung der Gravitation ein einziger Vektor, nämlich die Beschleunigung $\mathfrak{b}$ ausreicht, pflegt man im Fall des materieerfüllten elektrischen und magnetischen Feldes jeweils drei Vektoren einzuführen: Flußdichten $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{B}$, Feldstärken $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$, Polarisationen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{M}$*). Diese Art der Beschreibung entspricht der früher

*) Die magnetische Polarisation $\mathfrak{M}$ wird hier als eine Größe von der Art einer magnetischen Kraftflußdichte benutzt, d. h. das mechanische Drehmoment $\mathfrak{N}$, welches auf einen Magneten vom magnetischen Moment $\mathfrak{m}_{\mathfrak{M}}$ in einem magnetischen Feld der Feldstärke $\mathfrak{H}$ ausgeübt wird, ist als

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{m}_{\mathfrak{M}} \times \mathfrak{H} \tag{47a}$$

didaktisch gern benutzten Unterscheidung zwischen wahren, freien und scheinbaren (oder induzierten) Ladungen, denen z. B. durch Beziehungen nach dem Schema der Gleichungen (6′) und (7′) die Flußdichten, Feldstärken und Polarisationen zugeordnet werden*).

Von den physikalischen Definitionsfestsetzungen solcher Beziehungen bleiben die geometrischen Verfügungen bez. der hier interessierenden Alternative rational ÷ nicht-rational unberührt. Jeder dieser 6 Vektoren kann willkürlich und unabhängig von den anderen 5 Vektoren rational oder nicht-rational eingeführt und mit den zugehörigen Quellen verknüpft werden.

Es sind dementsprechend 6 Zuordnungskoeffizienten α festzulegen, deren jeder gemäß den Verfügungen (5) den Wert 1 oder 4π annehmen kann. Wir tun dieses nach dem Schema der Tabelle 1. Da jedem dieser 6 Koeffizienten

Tabelle 1.
Zuordnungskoeffizienten für das elektrische und magnetische Feld

Feldvektoren		$\mathfrak{E}$	$\mathfrak{D}$	$\mathfrak{P}$	$\mathfrak{H}$	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{M}$
Zuordnungskoeffizient	Fall I	χ_e	ν_e	λ_e	χ_m	ν_m	λ_m
	Fall II	χ	ν_e	λ	χ	ν_m	λ

$\chi_e, \nu_e, \lambda_e, \chi_m, \nu_m, \lambda_m$ (Fall I) ein „rationaler“ und ein „nicht-rationaler Zahlenwert“ gegeben werden kann, bestehen grundsätzlich $2^6 = 64$ Möglichkeiten einer rationalen oder nicht-rationalen Größendefinition und Gleichungsschreibweise für die Gesetzmäßigkeiten des elektromagnetischen Feldes. Erfreulicherweise ist nicht von allen 64 Möglichkeiten Gebrauch gemacht worden. Man hat für die Feldstärken und Polarisationen im elektrischen und magnetischen Feld stets gleichmäßig rational oder nicht-rational verfügt, dagegen diese Festlegung für die Flußdichten heterogen gehandhabt. Wir können daher $\chi_e = \chi_m = \chi$ und $\lambda_e = \lambda_m = \lambda$ setzen, müssen jedoch zwischen ν_e und ν_m unterscheiden. Somit kommen wir für die praktisch wichtigen Darstellungsarten der Elektrodynamik mit den 4 Zuordnungskoeffizienten $\chi, \nu_e, \nu_m, \lambda$ (Fall II der Tabelle 1) aus, womit sich die Zahl der Möglichkeiten zunächst auf $2^4 = 16$ reduziert.

Der Zusammenhang zwischen den das materieerfüllte elektrische oder magnetische Feld beschreibenden Vektoren ist analog Gleichung (8) zu schreiben. Wir wollen hier allgemein die Darstellung der Elektrodynamik mit 4 Grund-

zu schreiben. Der Unterschied der magnetischen Polarisation $\mathfrak{M}$ gegenüber der von Mie und Sommerfeld bevorzugten Magnetisierung $\mathfrak{J}$ als einer Größe von der Art einer magnetischen Feldstärke, d. h. verknüpft mit der Gleichung

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{m}_3 \times \mathfrak{B} \tag{47 b}$$

für das mechanische Drehmoment, ist für das hier behandelte Problem der Rationalisierung ohne Belang [zu der Frage $\mathfrak{M} \div \mathfrak{J}$ siehe z. B. bei Döring[6])].

*) Die Auffassung, daß es keine wahre magnetische Ladung gibt, äußert sich dann darin, daß in den den Gleichungen (6′) und (7′) entsprechenden Beziehungen $\mu_a = 0$ ist, d. h. daß sich „freie“ und „induzierte“ magnetische Ladungsdichte die Waage halten.

größen*) benutzen, bei welcher die Feldkonstanten ε_0 und μ_0 explizit in den Gleichungen auftreten. Dann haben wir, wenn wir in der Gleichung (8) für $\mathfrak{A}$ die Flußdichten, für $\mathfrak{B}$ die Feldstärken und für $\mathfrak{C}$ die Polarisationen einführen, die skalare Größe b gleich der elektrischen Feldkonstanten ε_0 bzw. der magnetischen Feldkonstanten μ_0 und $c = 1$ zu setzen**) und erhalten

$$\frac{\mathfrak{D}}{\nu_e} = \varepsilon_0 \frac{\mathfrak{E}}{\chi} + \frac{\mathfrak{P}}{\lambda} \qquad (48) \qquad\qquad \frac{\mathfrak{B}}{\nu_m} = \mu_0 \frac{\mathfrak{H}}{\chi} + \frac{\mathfrak{M}}{\lambda}. \qquad (49)$$

In der 4-Grundgrößen-Darstellung ist die skalare Größe a, welche in den das Durchflutungsgesetz charakterisierenden Gleichungen (13) auftritt, gleich Eins zu setzen***); dieses lautet also

$$\oint \mathfrak{H} \cdot d\mathfrak{s} = \chi I, \qquad (50)$$

während die Maxwellschen Gleichungen nach dem Schema der Gleichungen (15) und (16) mit ihren Randbedingungen ($\varkappa$: elektrische Leitfähigkeit; ε: relative Dielektrizitätskonstante; μ: relative Permeabilität) entsprechend den Gleichungen (4)

$$\oint \frac{\mathfrak{H}}{\chi} \cdot d\mathfrak{s} = \int \mathfrak{G} \cdot d\mathfrak{f} + \frac{d}{dt} \int \frac{\mathfrak{D}}{\nu_e} \cdot d\mathfrak{f} = \int \varkappa \mathfrak{E} \cdot d\mathfrak{f} + \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int \varepsilon \frac{\mathfrak{E}}{\chi} \cdot d\mathfrak{f} \qquad (51)$$

$$\oint \frac{\mathfrak{E}}{\chi} \cdot d\mathfrak{s} = -\frac{d}{dt} \int \frac{\mathfrak{B}}{\nu_m} \cdot d\mathfrak{f} = -\mu_0 \frac{d}{dt} \int \mu \frac{\mathfrak{H}}{\chi} \cdot d\mathfrak{f} \qquad (52)$$

$$\oint \frac{\mathfrak{D}}{\nu_e} \cdot d\mathfrak{f} = \Sigma Q \qquad (53)$$

$$\oint \frac{\mathfrak{B}}{\nu_m} \cdot d\mathfrak{f} = 0 \qquad (54)$$

zu schreiben sind. Wir fügen noch die Relationen zwischen den beschreibenden Feldvektoren im materieerfüllten Feld, die Gleichungen für Energiedichte w und Energieströmung $\mathfrak{S}$, die Punktkraftgesetze (p: magnetische Polstärke; $p\, d\mathfrak{s} = \mathfrak{m}_{\mathfrak{M}}$), sowie die Differentialgleichungen und je eine spezielle Lösung

*) Die physikalisch verschiedenen Beschreibungsarten mit 3, 4 oder 5 Grundgrößen, auf die in einer weiteren Veröffentlichung[1]) eingegangen wird, sind gegenüber der hier zur Diskussion stehenden geometrischen Alternative rational ÷ nicht-rational vollkommen gleichwertig. Bei einem Übergang von dem hier zugrunde gelegten 4-Grundgrößen- zu einem 3- oder 5-Grundgrößen-System sind entsprechende Verfügungen über die Größen ε_0 und μ_0 und die im Vierer- System nicht auftretende Größe γ zu treffen.

**) In der Vierer-Definition werden die Feldstärken mit den Vakuumflußdichten über die Feldkonstanten verknüpft ($\mathfrak{D}_0 = \varepsilon_0 \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{B}_0 = \mu_0 \mathfrak{H}$), die Polarisationen dagegen als Differenzen zwischen der Flußdichte in der Materie und der Vakuumflußdichte eingeführt ($\mathfrak{P} = \mathfrak{D} - \mathfrak{D}_0$ und $\mathfrak{M} = \mathfrak{B} - \mathfrak{B}_0$).

***) In der Vierer-Definition wird die magnetische Randspannung der elektrischen Durchflutung gleichgesetzt, d. h. die magnetischen Größen werden direkt per definitionem auf die elektrischen zurückgeführt.

für das skalare Potential φ und das vektorielle Potential $\mathfrak{A}$ [entsprechend den Gleichungen (10) und (11) bzw. (20) und (21)] an:

$$\frac{\mathfrak{D}}{\nu_e} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\mathfrak{E}}{\chi} = \varepsilon_0 \frac{\mathfrak{E}}{\chi} + \frac{\mathfrak{P}}{\lambda} \quad (55) \qquad \frac{\mathfrak{B}}{\nu_m} = \mu\mu_0 \frac{\mathfrak{H}}{\chi} = \mu_0 \frac{\mathfrak{H}}{\chi} + \frac{\mathfrak{M}}{\lambda} \quad (56)$$

$$w_e = \frac{1}{2}\frac{\mathfrak{E}\cdot\mathfrak{D}}{\nu_e} \quad (57) \qquad w_m = \frac{1}{2}\frac{\mathfrak{H}\cdot\mathfrak{B}}{\nu_m} \quad (58) \qquad \mathfrak{S} = \frac{1}{\chi}(\mathfrak{E}\times\mathfrak{H}) \quad (59)$$

$$\mathfrak{K}_e = \frac{\chi Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}\mathfrak{r}^0 = Q\,\mathfrak{E} \quad (60) \qquad \mathfrak{K}_m = \frac{\chi p_1 p_2}{4\pi\mu\mu_0 r^2}\mathfrak{r}^0 = p\,\mathfrak{H} \quad (61)$$

$$\Delta\varphi = -\chi\frac{\eta}{\varepsilon\varepsilon_0}\ ^{*)} \quad (62) \qquad \Delta\mathfrak{A} = -\nu_m\mu\mu_0\,\mathfrak{G}\ ^{*)} \quad (63)$$

$$\varphi = \frac{\chi Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}\ ^{*)} \quad (62\,\mathrm{a}) \qquad \mathfrak{A} = \frac{\nu_m\mu\mu_0 I}{4\pi}\oint\frac{d\mathfrak{s}}{r}\ ^{*)}. \quad (63\,\mathrm{a})$$

Von den 16 Fällen, welche diese Gleichungen bez. der Alternative rational ÷ nicht-rational umfassen, sind 4 von besonderer Bedeutung. Wir stellen diese in der Tabelle 2 zusammen. Die beiden ersten wurden, da bei ihnen ein Teil der Zuordnungskoeffizienten = 1, ein anderer = 4 π zu setzen ist, als teil-rational bezeichnet.

Tabelle 2. Werte der Zuordnungskoeffizienten χ, ν_e, ν_m, λ

	χ	ν_e	ν_m	λ
Teil-rational (nach Maxwell)	4π	1	4π	1
Teil-rational (nach Gauß)	4π	4π	4π	1
Nicht-rational (nach Schaefer) . . .	4π	4π	4π	4π
Rational	1	1	1	1

Die erste Art der Definition und Gleichungsschreibweise, wie sie Maxwell in seinem Treatise on Electricity and Magnetism benutzt, spielt eine wichtige Rolle für die Entwicklung der elektrischen Einheitensysteme[7]), welche aus den zu diesen Maxwellschen Größen und Gleichungensatz passenden elektromagnetischen Einheiten herzuleiten sind. Die zweite Art, welche Gauß zugeschrieben wird, erfreut sich in der theoretischen Physik großer Beliebtheit. Die dritte Art, welche Cl. Schaefer in seiner Einführung in die Theoretische Physik verwendet, ist die einzige konsequent nicht-rationale. Die vierte, rationale Art hat sich heute weitgehend durchgesetzt.

Die Gleichungen (51) bis (63) können nach den Ausführungen des Abschnitts 3 in zweierlei Weise interpretiert werden: Entweder faßt man die Zuordnungskoeffizienten als Teil der Größendefinition auf (Methode a: Variation der Größen). Dann erhält man verschiedene Größengleichungssysteme zwischen rational, teil- oder nicht-rational definierten Größen, wenn man die in den einzelnen Reihen der Tabelle 2 angegebenen Zahlenwerte für χ, ν_e, ν_m, λ einsetzt;

*) Daß in den Gleichungen (62) und (62a) des elektrischen Feldes der Koeffizient χ, in den Gleichungen (63) und (63a) des magnetischen Feldes ν_m auftritt, liegt daran, daß das skalare elektrische Potential φ über die Beziehung $\mathfrak{E} = -\operatorname{grad}\varphi$ von der elektrischen Feldstärke, dagegen das vektorielle magnetische Potential $\mathfrak{A}$ über die Beziehung $\mathfrak{A} = \operatorname{rot}\mathfrak{B}$ von der magnetischen Flußdichte abgeleitet wird.

dabei gehören zu den rationalen, teil- oder nicht-rationalen Größen stets die gleichen abgestimmten Einheiten. Zum anderen kann man die Zuordnungskoeffizienten als Einheiten-erzeugende Konstanten ansehen, also unter den in diesen Gleichungen stehenden Formelzeichen einen in ganz bestimmter Art, beispielsweise rational definierten Größensatz verstehen (Methode b: Methode der Variation der Einheiten). Für diese Größen sind die Gleichungen Größengleichungen mit den Zahlenwerten der vierten (rationalen) Reihe der Tabelle 2, während Einsetzen der in den ersten drei Reihen für χ, ν_e, ν_m und λ stehenden Werte zu teil- oder nicht-rationalen Zahlenwertgleichungen führt; die zugehörigen teil- oder nicht-rationalen Einheiten unterscheiden sich von den auf das rationale Größengleichungssystem abgestimmten um Potenzen des Faktors 4π und bilden nicht mehr abgestimmte Einheitensysteme. Beide Auffassungen sind für die Gesamtbehandlung des Problems gleichwertig.

Die Frage der wechselseitigen Überführung zwischen rationaler und nicht-rationaler Größendefinition, Gleichungsschreibweise und Einheitenfestlegung wurde grundsätzlich schon im Abschnitt 3 diskutiert. Die historische Entwicklung lief von der nicht-rationalen zur rationalen Darstellung. Zu der Zeit, als man sich anschickte, die elektrischen und magnetischen Erscheinungen systematisch zu erforschen, war man sich zwar vollkommen klar darüber, daß es sich hier um völlig neuartige Phänomene handelte. Andererseits mußten die ersten quantitativen Schritte in dieses physikalische Neuland mit den seinerzeit nur zur Verfügung stehenden mechanischen Meßmethoden getan werden und standen in ihrer formalen Beschreibung unter dem damals vorherrschenden mechanistischen Weltbild. Wie wir im Abschnitt 4 anmerkten, faßte Newton sein grundlegendes mechanisches Punktkraftgesetz nicht-rational. So wurden natürlicherweise auch die elektrischen und magnetischen Größen, deren Definition von analogen elektrischen und magnetischen Punktkraftgesetzen her erfolgte, nicht-rational eingeführt. Heaviside und Lorentz gingen dann Ende des vorigen Jahrhunderts zur rationalen Schreibweise über. Lorentz*) rationalisierte das Gleichungssystem dadurch, daß er unter Festhalten der nicht-rationalen Größendefinition neue „rationale" Einheiten so einführte, daß die zu diesen rationalen Einheiten passenden Zahlenwertgleichungen rational wurden. Lorentz bediente sich also der im dritten Abschnitt gekennzeichneten Methode bβ). Vom Standpunkt der Größengleichungslehre würde man diese Art der Rationalisierung vielleicht lieber nach der äquivalenten Methode aβ) beschreiben. Nachdem sich in den letzten Jahrzehnten experimentelle und angewandte Physik und Elektrotechnik allgemein auf die rationale Behandlung geeinigt haben, interessiert heute im wesentlichen der rückläufige Weg, d. h. der Anschluß der jetzigen rationalen Größen und Einheiten an die nicht-rationale Darstellung des vorigen Jahrhunderts. Hierfür ist die Methode bα) geeignet. Für den formalen Anschluß der zu unserer heutigen rationalen Darstellung passenden Einheiten an ihre nicht-rationalen Vorgänger aus dem nicht-rationalen elektromagnetischen System sind die letzten Absätze des Abschnitts 3 wichtig.

*) Siehe z. B. bei H. A. Lorentz[8]). Eine vollständige Darstellung der historischen Entwicklung des Rationalisierungsproblems und eine eingehende Würdigung der besonderen Verdienste einzelner Physiker und Elektrotechniker in seinen verschiedenen Phasen — wie z. B. der grundlegenden Arbeiten von Heaviside — soll und kann nicht Aufgabe dieser Abhandlung sein.

Daß bei der Lorentzschen Art der Rationalisierung der überwiegende Teil der elektrischen und magnetischen Größen bzw. der zu ihnen gehörigen Einheiten seine Definition änderte, können wir heute nur als eine unangenehme Tatsache feststellen. Es liegt dieses wesentlich daran, daß in der seinerzeit üblichen mechanistischen Beschreibung der Elektrodynamik, der ein mechanisches 3-Grundgrößen-System zugrunde liegt, die Feldkonstanten ε_0 und μ_0 nicht bekannt, d. h. die in den Gleichungen (10) und (11) auftretende skalare Größe a bzw. der Skalar b in den Gleichungen (16) und (21) im Vakuum gleich Eins waren. Infolgedessen wurden diese Größen a und b, also in unserer heutigen Auffassung die Feldkonstanten, zwangsläufig zu Invarianten gegenüber der Rationalisierung.

Wenn man stattdessen z. B. die elektrische Ladung Q und den magnetischen Fluß Φ als Invarianten bei der Rationalisierung festlegt, bleiben alle elektrischen und magnetischen Größen und ihre Einheiten mit Ausnahme der Feldkonstanten und der Größen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{H}$ erhalten [9]). Einen entsprechenden Rationalisierungsvorschlag, der allgemein durch die Methode aα) des Abschnitts 3 beschrieben wird, legte Giorgi [10]) vor. Zweifellos wäre bei unserer heutigen Kenntnis der Dinge der Giorgischen Art der Rationalisierung der Vorzug zu geben. Es darf aber dabei nicht übersehen werden, daß die historische Entwicklung, welche gleichzeitig den Werdegang unserer Einheitensysteme bestimmte, nun einmal anders, und zwar über die von Lorentz vorgenommene Rationalisierung verlaufen ist. Der Giorgische Vorschlag stellt nur einen Idealfall*) dar und kann nicht als Basis für den praktischen Anschluß unserer heutigen rationalen Einheiten an die nicht-rationalen elektromagnetischen Einheiten dienen. Wenn man also von unserer heutigen rationalen Darstellung ausgehend diese beiden Einheitenarten entsprechend ihrem historisch bedingten Zusammenhang verknüpfen will, so sollte man sich der Methode aβ) oder bα) bedienen und nicht der Methode aα) [7]).

Zum Schluß wollen wir noch einige Bemerkungen über andere Darstellungen des Rationalisierungsproblems in der Elektrodynamik anfügen. Die geometrische Alternative rational $\div$ nicht-rational wird meist mit einer von ihr unabhängigen, physikalisch bedingten Alternative verknüpft, nämlich der unterschiedlichen Behandlung der Elektrodynamik mit 3 oder 4 Grundgrößen, welche sich z. B. in dem Nichterscheinen bzw. in dem expliziten Auftreten der Feldkonstanten im beschreibenden Gleichungssystem äußert. Die Verkopplung dieser beiden Alternativen ist nicht zuletzt durch die Tatsache begründet, daß die Gleichungen mit 3 Grundgrößen meist nicht-rational geschrieben wurden, die 4-Grundgrößen-Auffassung dagegen durchweg rational formuliert wird; in ihr drücken sich die Gesetzmäßigkeiten für das elektromagnetische Feld rational in der Form der Gleichungen (51) bis (63) mit $\chi = \nu_e = \nu_m = \lambda = 1$ aus.

Den Übergang von diesem rationalen Gleichungssystem zu einer Schreibweise, welche der Benutzung von mechanischen 3-Grundeinheiten-Systemen

*) Auch Häberli [11]) sieht mit Rücksicht auf die nun einmal erfolgte Namensgebung für die praktischen Einheiten (Volt, Ampere, Ohm usw.) die Methode der Größenvariation bei Festhalten der Einheiten nach dem Giorgischen Verfahren aα) unter Hintanstellung der historischen Gegebenheiten als den heute idealen Weg einer Rationalisierung an.

angepaßt ist, stellt man weitgehend durch die Verfügungen $\varepsilon_0 = 1$ bzw. $\mu_0 = 1$ für eine rationale Gleichungenschreibung und $\varepsilon_0 = 1/4\,\pi$ bzw. $\mu_0 = 1/4\,\pi$ für eine nicht-rationale Gleichungenschreibung dar [12]). Es wird also eine physikalische Größenverfügung über ε_0 und μ_0 mit der geometrischen Koeffizientenverfügung über χ zusammengefaßt. Dabei müssen dann zusätzliche Festsetzungen über eine rationale oder nicht-rationale Einführung der Vektoren $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{B}$, d. h. in unserer Beschreibungsweise über die Zuordnungskoeffizienten ν_e und ν_m gemacht werden, während die entsprechende Alternative bez. der Polarisationsvektoren (Koeffizient λ) dadurch unterdrückt wird, daß man die Unterscheidung nicht-rational ÷ rational einfach auf die Schreibweisen der Reihen 1, 2 und 4 der Tabelle 2 beschränkt, für die λ den gleichen Wert 1 besitzt.

Wenn man als „nicht-rationale" Darstellung nur eine ganz bestimmte Schreibweise, z. B. die sogenannte Gaußsche der theoretischen Physik (Reihe 3 der Tabelle 2) zuläßt, kann man zur Behandlung der Alternative rational ÷ nicht-rational außer der Eliminierung des Zuordnungskoeffizienten λ noch die drei restlichen Koeffizienten χ, ν_e, ν_m zu einem einzigen Koeffizienten ψ zusammenfassen, der entweder $= 1$ oder $= 4\,\pi$ zu setzen ist. In dieser Art geht Wallot [9]) vor.

Wir halten diese Formen der Behandlung des Rationalisierungsproblems nicht für zweckmäßig. Einmal aus grundsätzlichen Erwägungen, da die Verknüpfung von zwei wesensverschiedenen Alternativen hier weder sachliche noch didaktische Vorteile bietet und daher im Interesse einer eindeutigen Klarstellung der Verhältnisse besser nicht angewandt werden sollte. Zum anderen erfaßt sie ohne mehrere zusätzliche Verfügungen nur ganz speziell ausgewählte Fälle.

Einen ganz anderen Weg beschreitet in einer interessanten neueren Veröffentlichung Hallén [13]). Er behandelt dort u. a. ausführlich den Fall des magnetischen Feldes an Hand von Beziehungen, die unserer Gleichung (49) entsprechen. Hallén vertritt die Auffassung, daß die Rationalisierung kein geometrisches Problem, sondern eine Frage der physikalischen Größendefinition bez. ihrer Dimensionsverhältnisse sei. Er stellt hierbei die beiden Definitionsgleichungen für die magnetische Feldstärke*)

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{h} + \mu_0\,\mathfrak{J} \tag{64}$$

und

$$\mathfrak{B} = \mu_0\,(\mathfrak{H} + \mathfrak{J}) \tag{65}$$

mit

$$\mathfrak{h} = \mu_0\,\mathfrak{H} \tag{66}$$

einander gegenüber. Die Beziehung (64) bezeichnet er als die „nicht-rationale" Gleichung für elektromagnetische CGS-Einheiten, d. h. wohl als eine Relation in der Darstellung mit 3 Grundgrößen oder -einheiten. Unter Benutzung des Giorgischen Rationalisierungsvorschlages (Methode a α), nach dem μ_0, gemessen in elektromagnetischen Einheiten, bei nicht-rationaler Definition gleich

*) Bezüglich des Magnetisierungsvektors $\mathfrak{J}$ siehe Fußnote *) auf S. 47.

4π ist, erhält Hallén mit Gleichung (64) die nicht-rationale Formulierung

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{J}, \tag{64a}$$

die unserer Gleichung (49) für die Zuordnungswerte nach Reihe 1 oder 2 der Tabelle 2 mit der grundsätzlichen Verfügung [1]) $\mu_0 = 1$ für die elektromagnetische Größendefinition oder Gleichungsschreibweise entspricht. Die Hallénsche Gleichung (65) ist mit der von Mie und Sommerfeld benutzten rationalen 4-Grundgrößen-Darstellung identisch, in der die Magnetisierung als eine Größe von der Art einer magnetischen Feldstärke $\mathfrak{H}$ eingeführt wird.

Hallén scheint bestechend einfach mit einem Schlage den ganzen Fragenkomplex der elektromagnetischen Gleichungenschreibung zu lösen. Seine Auffassung wäre auch vielleicht für einen heute etwa vorzunehmenden Neuaufbau rationaler und nicht-rationaler Gleichungssysteme zweckmäßig [sofern man auch seiner Einführung der Größe „Magnetisierung" zustimmen will, was hier jedoch nicht zur Debatte steht [6])]. Allerdings wird Hallén der vielgestaltigen tatsächlichen Entwicklung der Dinge nicht gerecht. Denn einmal bedient er sich des Giorgischen Idealvorschlages zur Rationalisierung, während die nun einmal durchgeführte Lorentzsche Rationalisierungsart nicht ohne zusätzliche Verfügungen in das Hallénsche Schema einzufügen ist. Zum anderen bleibt dieses wieder auf einen ganz bestimmten Spezialfall der teil-rationalen Behandlung beschränkt. Wenn man nur die 4 verschiedenen Darstellungsarten berücksichtigen will, welche in unserer Beschreibung durch ihre Zuordnungskoeffizienten in der Tabelle 2 zusammengefaßt sind, so müßte die Hallénsche Behandlung auch noch bez. der Definition der Polarisationsvektoren [im magnetischen Fall analog Gleichung (66) entweder als $\mathfrak{M}$ oder als $\mathfrak{J}$] erweitert werden, um beispielsweise die beiden verschiedenen Beschreibungen nach Reihe 3 und 4 der Tabelle 2 einzuschließen — eine solche doppeldeutige physikalische Definition der Polarisationsgrößen erscheint aber sehr gewagt.

Vielleicht wird eingewandt werden, daß die hier vorgetragene Behandlung des Rationalisierungsproblems in der Elektrodynamik zu „umständlich" sei und daß man das Schema der Tabelle 2 nicht im Kopf behalten könne. Dem sei entgegengehalten, daß andere Schemata auch nicht ohne weiteres auf Auswendiglernen zugeschnitten sind und im allgemeinen gleichfalls in Form von „Maßsystemsschlüsseln" dargeboten werden. Wenn solche Schlüssel die 4 Schreibweisen der Tabelle 2, die bei einer Darstellung der Gesetzmäßigkeiten auf der Basis von 3 Grundgrößen nebeneinander benutzt werden, umfassen soll, müssen sie direkt oder indirekt zwangsläufig die gleiche Zahl von Verfügungen enthalten wie die Tabelle 2. Unser Verfahren besitzt demgegenüber die Vorteile, daß es einmal aus einem allgemeinen, nicht auf die Elektrodynamik beschränkten geometrischen Prinzip abzuleiten ist, zum anderen die Alternative rational $\div$ nicht-rational von der von dieser grundsätzlich verschiedenen der Beschreibung mit 3-, 4- oder 5-Grundgrößen-Systemen klar abhebt, weiter sich je nach Belieben nach der Methode der Variation der Größen wie der der Einheiten handhaben läßt, ferner sowohl auf die Lorentzsche wie die Giorgische Rationalisierungsart anzuwenden ist und schließlich die wechselseitigen Übergänge zwischen allen praktisch benutzten Schreibweisen bei Zugrundelegung der tatsächlich durchgeführten Lorentzschen Rationalisierung entsprechend der historischen Einheitenentwicklung umfaßt.

Zusammenfassung

Die Frage einer rationalen oder nicht-rationalen Gleichungsschreibweise, Größendefinition und Einheitenfestlegung wird zunächst allgemein für Quellen- und Wirbelfelder formuliert und dargestellt. Zur Kennzeichnung dieser geometrischen Alternative werden dimensionslose Zuordnungskoeffizienten eingeführt, welche rational gleich 1 und nicht-rational gleich 4π zu setzen sind. Der Übergang rational $\rightleftarrows$ nicht-rational läßt sich allgemein nach der Methode der Variation der Größen wie der der Variation der Einheiten behandeln. Die seit Newton übliche Art der Behandlung der Massenanziehung erweist sich als nicht-rational. An Hand der allgemein aufgestellten Prinzipien wird das Problem der rationalen und nicht-rationalen Beschreibung der Elektrodynamik sowie der wechselseitige Übergang von der einen zur anderen Art behandelt. Für vier praktisch wichtige Gleichungsschreibweisen (rational, teil-rational nach Maxwell bzw. nach Gauß, nicht-rational nach Schaefer) wird ein diese umfassender Gleichungensatz entwickelt und das zugehörige Zuordnungskoeffizienten-Schema aufgestellt. Abschließend wird das hier durchgeführte Verfahren den Darstellungen anderer Autoren gegenübergestellt.

Literatur

1) U. Stille, Abh. Braunschw. Wiss. Ges. Bd. I, Heft 1, 1949, S. 56.
2) C. Budeanu, Bull. Soc. Franç. Électr. (6) **7**, 563, 1947.
3) F. Hund, Phys. Z. **39**, 376, 1938.
4) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. (5) **36**, 335, 1939.
5) J. Fischer, Z. Phys. **100**, 360, 1936; Einführung in die klassische Elektrodynamik, Berlin 1936, S. 170.
6) W. Döring, Ann. d. Phys. (6) 1949, im Druck.
7) U. Stille, Arch. Elektrotechn. **39**, 130, 1948.
8) H. A. Lorentz, Encykl. Math. Wiss. Band V/2, Leipzig 1904, S. 67.
9) J. Wallot, Phys. Z. **44**, 17, 1943; ETZ. **64**, 13, 299, 1943.
10) G. Giorgi, Proc. Phys. Soc. London, May 23, 1902; Chem. News **85**, 272, 1902.
11) F. Häberli, Schweiz. Arch. angew. Wiss. Techn. **13**, 113, 1947.
12) E. Cohn, Das elektromagnetische Feld, 1. Auflage, Leipzig 1900, S. 280; 2. Auflage, Berlin 1927, S. 190.
F. Emde, ETZ. **25**, 432, 1904, Handwörterbuch Naturwiss. Band 7, Jena 1932, S. 1018.
J. Fischer, Z. Phys. **100**, 360, 1936; Einführung in die klassische Elektrodynamik, Berlin 1936, S. 169; Phys. Z. **43**, 24, 1942.
13) E. Hallén, Trans. Roy. Inst. Techn. Stockholm, No. 6, 1947.